バビロンの流れのほとり : $omega$のコンパクト化が定める実数集合 (集合論的及び幾何学的トポロジーの現状とその展望)

嘉田, 勝

数理解析研究所講究録
第 1884 巻 2014 年 98-106

バビロンの流れのほとり
— ω のコンパクト化が定める実数集合 —

嘉田 勝 (大阪府立大学)
Masaru Kada (Osaka Prefecture University)

super flumina Babylonis illic sedimus et flevimus cum recordaremur Sion
in salicibus in medio eius suspendimus organa nostra
quia illic interrogaverunt nos qui captivos duxerunt nos verba cantionum et qui abduxerunt nos hymnum cantate nobis de canticis Sion
quomodo cantabimus canticum Domini in terra aliena

— Psalm 137

1 はじめに

ここでは特に断らない限り，コンパクトでない局所コンパクト距離空間を扱う．空間 X のコンパクト化 $\alpha X, \gamma X$ について，γX から αX への連続な全射で，X への制限が恒等写像となるものが存在するとき，$\alpha X \leq \gamma X$ と表す．特にその写像が同相写像でとれるとき，$\alpha X \simeq \gamma X$ と表し，$\alpha X \simeq \gamma X$ と表す．X のコンパクト化全体を $\mathsf{Cpt}(X)$ とする．$\mathsf{Cpt}(X)$ の元を $\simeq$ に関する同値類と考えると，$\mathsf{Cpt}(X)$ は $\leq$ 関係について完備上半束をなし，X の Stone–Čech コンパクト化 βX は $\leq$ に関する最大元となる．

$\mathsf{Cpt}(X)$ の部分集合 $\mathcal{P}$ が束の意味で $\beta X \simeq \sup \mathcal{P}$ を満たすときの，βX を近似するための本質的に必要な $\mathcal{P}$ の元の個数を考えると，それは $(\mathsf{Cpt}(X), \leq)$ における $\mathcal{P}$ の順序構造を反映した基数と捉えられる．そこで，[3, 5] では，上述の性質をもつクラスとして，ともに距離に依存するコンパクト化として知られている Smirnov コンパクト化と Higson コンパクト化のクラスに注目して，既知の実数の基数不変量との関係を調べた．

本稿では，それらの基数を「カントール空間の『小さい』集合の集まりに関する被覆数」という枠組みで捉え直すことで，新たな考察の切り口を提示する．

2 ω のコンパクト化が定める基数不変量

空間 X から $\mathbb{R}$ への有界連続関数の全体 $C^*(X)$ は，各点ごとの和と積および一様ノルム位相に関する位相環となる．

定義 2.1. X のコンパクト化 αX について，X から $\mathbb{R}$ への有界連続関数のうち αX 上に連続に拡張できる（すなわち，$\bar{f} \in C^*(\alpha X)$ で，$\bar{f} \restriction X = f$ を満たすものが一意的に存在する）ものの全体を $C_{\alpha X}$ で表す．

$C_{\alpha X}$ は $C^*(X)$ の点と閉集合を分離する閉部分環をなし，定数関数をすべて含む．また，この $C_{\alpha X}$ は αX を生成する $C^*(X)$ の部分集合のうち最大のものである．逆に，定数関数をすべて含み，かつ $C^*(X)$ の点と閉集合を分離する閉部分環 R が与えられたとき，X のコンパクト化 αX で，$C_{\alpha X} = R$ となるものが存在する．X の Stone–Čech コンパクト化 βX については，すべての $f \in C^*(X)$ が βX 上に連続に拡張できる．

空間 X のコンパクト化 αX と，X の空でない閉集合 A, B に対して，$\mathrm{cl}_{\alpha X} A \cap \mathrm{cl}_{\alpha X} B = \emptyset$ であるときに $A \parallel B \ (\alpha X)$ と記し，その否定を $A \nparallel B \ (\alpha X)$ と記す．

補題 2.2. [3, 補題 1.1] X のコンパクト化 $\alpha X, \gamma X$ について，次は同値である．

(1) $\alpha X \leq \gamma X$.
(2) X の閉集合 A, B について，$A \parallel B \ (\alpha X)$ ならば $A \parallel B \ (\gamma X)$ である．
(3) $f \in C^*(X)$ について，f が αX 上に連続に拡張可能ならば，f は γX 上に連続に拡張可能である．

補題 2.3. [3, 補題 1.2] $\mathcal{A}$ を X のコンパクト化の集合とする．X の空でない互いに素な閉集合 A, B について，以下は同値である．

(1) $A \parallel B \ (\sup \mathcal{A})$.
(2) ある有限集合 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ について $A \parallel B \ (\sup \mathcal{F})$.

X から $\mathbb{R}$ への距離 d に関する有界一様連続関数の全体 $U_d^*(X)$ は $C^*(X)$ の閉部分環で，定数関数をすべて含み，かつ点と閉集合を分離する族である．この $U_d^*(X)$ と対応するコンパクト化を $u_d X$ で表し，(X, d) の Smirnov コンパクト化という．

補題 2.4. コンパクトでない距離空間 (X, d) のコンパクト化 αX について，次は同値．

(1) $\alpha X \simeq u_d X$.
(2) $f \in C^*(X)$ について，f が αX 上に連続に拡張できることと $f \in U_d^*(X)$ であることが同値である.
(3) X の閉集合 A, B について，$A \parallel B$ (αX) と $d(A,B) > 0$ が同値である.

距離化可能空間 X について，X と同じ位相を導く距離関数の全体を $\mathrm{M}(X)$ で表す. 次の定理は，距離化可能空間 X の Stone–Čech コンパクト化 βX は，X と同じ位相を導く距離関数に関する Smirnov コンパクト化の全体で近似できることを意味する.

定理 2.5. [7] X をコンパクトでない距離空間とするとき $\beta X \simeq \sup\{u_d X : d \in \mathrm{M}(X)\}$.

次の定義は，「ω の Stone–Čech コンパクト化はいくつの Smirnov コンパクト化で（自明でない形で）近似できるか」という当初の問題意識に沿ったものである.

定義 2.6. $\mathrm{M}'(X) = \{d \in \mathrm{M}(X) : u_d X \not\simeq \beta X\}$ とし，基数 $\mathfrak{sp}$ を次で定義する.

$$\mathfrak{sp} = \min\left\{ |D| \;\middle|\; \begin{array}{c} D \subseteq \mathrm{M}'(\omega), \forall F \in [D]^{<\omega} \left(\sup\{u_d\omega : d \in F\} \not\simeq \beta\omega\right) \\ \text{かつ } \sup\{u_d\omega : d \in D\} \simeq \beta\omega \end{array} \right\}$$

しかし，この定義では扱いづらいので，手がかりとして，より単純な概念を定義する.

$d_1, d_2 \in \mathrm{M}(X)$ に対し，$U_{d_1}^*(X) \subseteq U_{d_2}^*(X)$ （あるいは，同値な条件として，$u_{d_1}X \leq u_{d_2}X$）であるとき，$d_1 \preceq d_2$ と表す. これは X 上の恒等写像が (X, d_2) から (X, d_1) への一様連続関数であることと同値である.

定義 2.7. 基数 $\mathfrak{sp}'$, $\mathfrak{st}$ を次で定義する. ただし，min の対象が空集合の場合には，$\min\emptyset$ を記号 ∞ で表現し，すべての基数 κ に対して $\kappa < \infty$ と規約する.

$$\mathfrak{sp}' = \min\left\{ |D| \;\middle|\; \begin{array}{c} D \subseteq \mathrm{M}'(\omega), D \text{ は } \preceq \text{ に関して有向で,} \\ \text{かつ } \sup\{u_d\omega : d \in D\} \simeq \beta\omega \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{st} = \min\left\{ |D| \;\middle|\; \begin{array}{c} D \subseteq \mathrm{M}'(\omega), D \text{ は } \preceq \text{ で整列されていて,} \\ \text{かつ } \sup\{u_d\omega : d \in D\} \simeq \beta\omega \end{array} \right\}$$

明らかに，$\mathfrak{sp} \leq \mathfrak{sp}' \leq \mathfrak{st}$ が成り立つ.

X 上の距離関数 d がプロパーであるとは，d に関して有界な X の部分集合がコンパクトな閉包をもつときにいう. プロパーな距離をもつ距離空間 (X, d) について，関数 $f \in C^*(X)$ が（距離 d に関して）slowly oscillating であるとは，任意の $r > 0, \varepsilon > 0$ に対し，X のコンパクト部分集合 $K_{r,\varepsilon}$ が存在し，すべての $x \in X \setminus K_{r,\varepsilon}$ について

$\mathrm{diam}(f'' \mathrm{B}_d(x,r)) < \varepsilon$ が成り立つときにいう．距離 d に関して slowly oscillating な $C^*(X)$ の元の全体を $C_d^*(X)$ で表す．$C_d^*(X)$ は $C^*(X)$ の閉部分環で点と閉集合を分離する族となる．$C_d^*(X)$ に対応するコンパクト化を $\overline{X}^d$ で表し，(X,d) の Higson コンパクト化という．X の交わらない空でない閉集合 A, B について，$A \parallel B$ $(\overline{X}^d)$ と，「任意の $r > 0$ に対して X のコンパクト部分集合 K_r が存在し，すべての $x \in X \setminus K_r$ について $d(x,A) + d(x,B) > r$ である」ことが同値である [2, Proposition 2.3].

X と同じ位相を導くプロパーな距離関数の全体を $\mathrm{PM}(X)$ で表す．局所コンパクトかつ可分な距離化可能空間 X については，$\mathrm{PM}(X) \neq \emptyset$ である [6, Lemma 3.1]. Higson コンパクト化による Stone–Čech コンパクト化の近似定理は，次の形で述べられる．

定理 2.8. [6, Proposition 3.2] X を，コンパクトでない局所コンパクトかつ可分な距離化可能空間とするとき，$\beta X \simeq \sup\{\overline{X}^d : d \in \mathrm{PM}(X)\}$ である．

定義 2.9. $\mathrm{PM}'(X) = \{d \in \mathrm{PM}(X) : \overline{X}^d \not\simeq \beta X\}$ とし，基数 $\mathfrak{hp}$ を次で定義する．

$$\mathfrak{hp} = \min\left\{ |D| \;\middle|\; \begin{array}{c} D \subseteq \mathrm{PM}'(\omega),\ \forall F \in [D]^{<\omega}\ (\sup\{\overline{\omega}^d : d \in F\} \not\simeq \beta\omega) \\ \text{かつ}\ \sup\{\overline{\omega}^d : d \in D\} \simeq \beta\omega \end{array} \right\}$$

$d_1, d_2 \in \mathrm{PM}(X)$ に対し，$\overline{X}^{d_1} \leq \overline{X}^{d_2}$ であるとき，$d_1 \trianglelefteq d_2$ と表す．

定義 2.10. 基数 $\mathfrak{hp}', \mathfrak{ht}$ を次で定義する．

$$\mathfrak{hp}' = \min\left\{ |D| \;\middle|\; \begin{array}{c} D \subseteq \mathrm{PM}'(\omega),\ D\ \text{は}\ \trianglelefteq\ \text{に関して有向で,} \\ \text{かつ}\ \sup\{\overline{\omega}^d : d \in D\} \simeq \beta\omega \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{ht} = \min\left\{ |D| \;\middle|\; \begin{array}{c} D \subseteq \mathrm{PM}'(\omega),\ D\ \text{は}\ \trianglelefteq\ \text{で整列されていて,} \\ \text{かつ}\ \sup\{\overline{\omega}^d : d \in D\} \simeq \beta\omega \end{array} \right\}$$

やはり明らかに $\mathfrak{hp} \leq \mathfrak{hp}' \leq \mathfrak{ht}$ が成り立つ．

3 ω のコンパクト化が定める実数集合

ω から $2 = \{0,1\}$ への関数全体の集合 2^ω に，2 点離散空間 $\{0,1\}$ の可算直積としての位相を導入した空間を**カントール空間**と呼ぶ．また，$\{0,1\}$ の各点に 1/2 の測度を与えて直積測度を考えることで，2^ω に測度を導入する．カントール空間は位相および測度の意味では通常の実数直線 $\mathbb{R}$ とほぼ同じ性質をみたす．その意味で，集合論ではしばしば 2^ω の要素を「実数」と考える．

前節で定めた $\mathfrak{sp}$ などの基数を,「『小さい』実数集合の集まり」で全体を被覆するために必要な最小の個数と捉えたい. そのために, 次の記法を導入する.

2^ω の「『小さい』部分集合の集まり」(部分集合や和集合について閉じている必要はない) $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(2^\omega) \setminus \{2^\omega\}$ に対して, $\mathsf{cov}(\mathcal{X})$, $\mathsf{cov}'(\mathcal{X})$, $\mathsf{cov}^\uparrow(\mathcal{X})$ を次によって定義する.

$$\mathsf{cov}(\mathcal{X}) = \min\{|\mathcal{Y}| : \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X} \text{ かつ } \bigcup \mathcal{Y} = 2^\omega\}$$
$$\mathsf{cov}'(\mathcal{X}) = \min\{|\mathcal{Y}| : \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}, \mathcal{Y} \text{ は } \subseteq\text{-有向集合, かつ } \bigcup \mathcal{Y} = 2^\omega\}$$
$$\mathsf{cov}^\uparrow(\mathcal{X}) = \min\{|\mathcal{Y}| : \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}, \mathcal{Y} \text{ は } \subseteq\text{-整列集合, かつ } \bigcup \mathcal{Y} = 2^\omega\}$$

命題 3.1. (1) $\mathsf{cov}(\mathcal{X}) \leq \mathsf{cov}'(\mathcal{X}) \leq \mathsf{cov}^\uparrow(\mathcal{X})$.

(2) $\mathcal{X}$ が $\subseteq$-有向集合であれば, $\mathsf{cov}(\mathcal{X}) = \mathsf{cov}'(\mathcal{X})$.

(3) $\mathsf{add}(\mathcal{X}) = \min\{|\mathcal{Y}| : \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X} \text{ かつ } \forall S \in \mathcal{X} (\bigcup \mathcal{Y} \not\subseteq S)\}$ と定義する. $\mathsf{add}(\mathcal{X}) = \mathsf{cov}(\mathcal{X})$ ならば, $\mathsf{add}(\mathcal{X}) = \mathsf{cov}(\mathcal{X}) = \mathsf{cov}'(\mathcal{X}) = \mathsf{cov}^\uparrow(\mathcal{X})$.

$\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(2^\omega) \setminus \{2^\omega\}$ に対し,

$$\mathcal{X} \preceq \mathcal{Y} \iff \forall X \in \mathcal{X} \exists Y \in \mathcal{Y} [X \subseteq Y]$$
$$\mathcal{X} \leq \mathcal{Y} \iff \exists \varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y} [\varphi \text{ は } \subseteq\text{-同型埋め込み, かつ } \forall X \in \mathcal{X} (X \subseteq \varphi(X))]$$

と定義する. 明らかに, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y} \Rightarrow \mathcal{X} \leq \mathcal{Y} \Rightarrow \mathcal{X} \preceq \mathcal{Y}$ が成り立つ. $\mathcal{Y}$ が部分集合に関して閉じていれば, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ と $\mathcal{X} \preceq \mathcal{Y}$ は同値である.

命題 3.2. $\mathcal{X} \preceq \mathcal{Y}$ ならば, $\mathsf{cov}(\mathcal{X}) \geq \mathsf{cov}(\mathcal{Y})$.

ω のコンパクト化 $\alpha\omega$ に対し, $A = 2^\omega \cap C_{\alpha\omega}$ とおく. $2^\omega \cap C_{\alpha\omega} = 2^\omega$ ($\Leftrightarrow 2^\omega \subseteq C_{\alpha\omega}$) と $\alpha\omega \simeq \beta\omega$ は同値である.

定理 3.3. (cf. [4, Lemma 4.1]) $\alpha\omega$ を ω のコンパクト化, $A = 2^\omega \cap C_{\alpha\omega}$ とするとき, 次が成り立つ.

(1) A は $(2^\omega, +)$ の部分群である.

(2) A は tail-set (有限個の成分の変更に関して不変) である.

(3) A は (modulo finite で考えて) $\mathcal{P}(\omega)/\text{fin}$ の部分ブール代数である.

ω のコンパクト化のクラス $\mathcal{C}$ に対し, $\mathsf{SEP}_\mathcal{C}$ および $\mathsf{SEP}_\mathcal{C}^{<\omega}$ を次で定義する.

$$\mathsf{SEP}_\mathcal{C} = \{2^\omega \cap C_{\alpha\omega} : \alpha\omega \in \mathcal{C}\} \setminus \{2^\omega\}$$
$$\mathsf{SEP}_\mathcal{C}^{<\omega} = \{2^\omega \cap C_{\alpha\omega} : \text{ある } \mathcal{F} \in [\mathcal{C}]^{<\omega} \text{ について } \alpha\omega \simeq \sup \mathcal{F}\} \setminus \{2^\omega\}$$

命題 3.4. $B \subseteq \omega$ に対し，次が成り立つ．ただし χ_B は B の特性関数を表す．

(1) $\chi_B \in \mathsf{SEP}_{\mathcal{C}} \iff$ ある $\alpha\omega \in \mathcal{C}$ について $B \parallel \omega \setminus B\ (\alpha\omega)$.

(2) $\chi_B \in \mathsf{SEP}_{\mathcal{C}}^{<\omega} \iff$ ある $\mathcal{F} \in [\mathcal{C}]^{<\omega}$ について $B \parallel \omega \setminus B\ (\sup \mathcal{F})$.

命題 3.5. $\mathsf{SEP}_{\mathcal{C}} \subseteq \mathsf{SEP}_{\mathcal{C}}^{<\omega}$. したがって，$\mathsf{cov}(\mathsf{SEP}_{\mathcal{C}}) \geq \mathsf{cov}(\mathsf{SEP}_{\mathcal{C}}^{<\omega})$, $\mathsf{cov}'(\mathsf{SEP}_{\mathcal{C}}) \geq \mathsf{cov}'(\mathsf{SEP}_{\mathcal{C}}^{<\omega})$, $\mathsf{cov}^{\uparrow}(\mathsf{SEP}_{\mathcal{C}}) \geq \mathsf{cov}^{\uparrow}(\mathsf{SEP}_{\mathcal{C}}^{<\omega})$.

ω の Smirnov コンパクト化の全体を U, ω の Higson コンパクト化の全体を H で表す．

命題 3.6. (1) $\mathfrak{sp} = \mathsf{cov}'(\mathsf{SEP}_U^{<\omega})$, $\mathfrak{hp} = \mathsf{cov}'(\mathsf{SEP}_H^{<\omega})$.

(2) $\mathfrak{sp}' = \mathsf{cov}'(\mathsf{SEP}_U)$, $\mathfrak{hp}' = \mathsf{cov}'(\mathsf{SEP}_H)$.

(3) $\mathfrak{st} = \mathsf{cov}^{\uparrow}(\mathsf{SEP}_U)$, $\mathfrak{ht} = \mathsf{cov}^{\uparrow}(\mathsf{SEP}_H)$.

2^ω におけるベール第一類集合の全体を $\mathcal{M}$，ルベーグ測度零の集合の全体を $\mathcal{N}$ で表す．

$(2^\omega, +)$ の真部分群で，解析集合（$\boldsymbol{\Sigma}_1^1$ 集合）かつ tail-set であるものの全体を $\mathcal{A}$ で表す．このとき，測度および位相に関する "zero-one law" により $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ である．したがって $\mathsf{cov}'(\mathcal{A}) \geq \mathsf{cov}(\mathcal{A}) \geq \mathsf{cov}(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) \geq \max\{\mathsf{cov}(\mathcal{M}), \mathsf{cov}(\mathcal{N})\}$ が成り立つ．

定理 3.7. (cf. [4, Lemmata 3.5 and 6.8]) $\mathsf{SEP}_U^{<\omega} \subseteq \mathcal{A}$, $\mathsf{SEP}_H^{<\omega} \subseteq \mathcal{A}$.

系 3.8. ([4, Theorems 3.6 and 6.9]) $\mathfrak{sp} \geq \mathsf{cov}'(\mathcal{A})$, $\mathfrak{hp} \geq \mathsf{cov}'(\mathcal{A})$.

$\mathcal{E} = \mathcal{N} \cap \boldsymbol{\Sigma}_2^0$ とおく（$\subseteq$ に関する閉包はとらない）．このとき，$\mathcal{E} \subsetneq \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ である [1, Section 2.6]．また，$\mathcal{E}$ は $\subseteq$-有向集合である．したがって $\mathsf{cov}'(\mathcal{E}) = \mathsf{cov}(\mathcal{E}) \geq \mathsf{cov}(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) \geq \max\{\mathsf{cov}(\mathcal{M}), \mathsf{cov}(\mathcal{N})\}$ が成り立つ．

命題 3.9. $\mathsf{SEP}_U \subseteq \mathcal{E}$.

証明. 正の有理数全体の集合を $\mathbb{Q}^+$ で表す．$f \in 2^\omega$ に対し，f が有界かつ連続であることは自明．f が ω 上の距離 d に関して一様連続であることの必要十分条件は，

$$\exists \delta \in \mathbb{Q}^+ \, \forall x, y < \omega \, [\, d(x,y) < \delta \to f(x) = f(y)\,]$$

と記述できる（値域が $\{0,1\}$ だから先頭の $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ が要らない）ので，$\boldsymbol{\Sigma}_2^0$-条件である．したがって，SEP_U の各々の元は 2^ω の $\boldsymbol{\Sigma}_2^0$-部分集合である． □

系 3.10. $\mathfrak{sp}' \geq \mathsf{cov}(\mathsf{SEP}_U) \geq \mathsf{cov}(\mathcal{E})$.

問題 3.11. $\mathsf{SEP}_U^{<\omega} \subseteq \mathcal{E}$?

Higson コンパクト化については，$\mathsf{SEP}_H \subseteq \mathcal{E}$ とまではいえない．なぜなら，$f \in 2^\omega$ に対して，f が距離 d に関して slowly oscillating であることの必要十分条件は

$$\forall r \in \mathbb{Q}^+ \, \exists k < \omega \, \forall x, y \in \omega \setminus k \, [\, d(x,y) < r \to f(x) = f(y) \,]$$

となり，これは Π^0_3-条件となってしまう（先頭の $\forall$ を落とせるとは思えない）からである．しかし，$\mathsf{SEP}_H \preceq \mathcal{E}$ は次のように示せる．

命題 3.12. $\mathsf{SEP}_H \preceq \mathcal{E}$.

証明. $\overline{\omega}^d \not\simeq \beta\omega$ を満たす ω 上の距離 d を固定すると，正の実数 r^d と ω の 2 点の組の列 $\{(a^d_i, b^d_i) : i < \omega\}$ を，

(1) すべての $i, j < \omega$ について $a^d_i \neq b^d_j$,
(2) $i \neq j$ ならば $a^d_i \neq a^d_j$, $b^d_i \neq b^d_j$,
(3) $d(a^d_i, b^d_i) < r^d$

を満たすように選べる．そこで，

$$A^d = \{ f \in 2^\omega : \exists m < \omega \, \forall i > m \, [\, f(a^d_i) = f(b^d_i) \,] \}$$

と定義すると，$2^\omega \cap C_{\overline{\omega}^d} \subseteq A^d$ かつ $A^d \in \mathcal{N} \cap \mathbf{\Sigma}^0_2 = \mathcal{E}$ である． □

系 3.13. (cf. [3, 命題 6.12]) $\mathfrak{hp}' \geq \mathsf{cov}(\mathsf{SEP}_H) \geq \mathsf{cov}(\mathcal{E})$.

4 超フィルタとの関係

$S, T \subseteq \omega$ に対し，$S \setminus T$ が有限集合であるとき，$S \subseteq^* T$ と表す．
$B \subseteq \omega$ に対し，

$$X_B = \{ f \in 2^\omega : B \subseteq^* f^{-1}\{0\} \text{ or } B \subseteq^* f^{-1}\{1\} \}$$

とおく．$\mathsf{CONST} \subseteq \mathcal{P}(2^\omega)$ を，

$$\mathsf{CONST} = \{ X_B : B \in [\omega]^\omega \}$$

と定義する．基数 $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{pp}$ を次で定義する．

$\mathfrak{r} = \min\{ |\mathcal{F}| : \forall X \in [\omega]^\omega \, \exists Y \in \mathcal{F} \, (Y \subseteq^* X \text{ or } Y \subseteq^* \omega \setminus X) \}$
$\mathfrak{u} = \min\{ |\mathcal{F}| : \mathcal{F}$ は ω 上の非単項超フィルタを生成する $\}$
$\mathfrak{pp} = \min\{ \kappa : $ simple P_κ-point が存在する $\}$

ただし，simple P_κ-point とは，$\subseteq^*$ に関する長さ κ の下降列で生成される ω 上の非単項超フィルタである．

命題 4.1. (1) $\mathsf{cov}(\mathsf{CONST}) = \mathfrak{r}$.

(2) $\mathsf{cov}'(\mathsf{CONST}) = \mathfrak{u}$.

(3) $\mathsf{cov}^{\uparrow}(\mathsf{CONST}) = \mathfrak{pp}\}$.

このとき，次の定理が証明できる．

定理 4.2. (cf. [4, Theorem 5.1]) $\mathsf{CONST} \subseteq \mathsf{SEP}_U$.

系 4.3. $\mathsf{cov}(\mathsf{SEP}_U) \leq \mathfrak{r}$, $\mathfrak{sp}' \leq \mathfrak{u}$, $\mathfrak{st} \leq \mathfrak{pp}$.

5 問題

問題 5.1. $\mathsf{CONST} \subseteq \mathsf{SEP}_H$? $\mathsf{CONST} \leq \mathsf{SEP}_H$? それとも，$\mathsf{CONST} \preceq \mathsf{SEP}_H$?

問題 5.2. $\mathsf{cov}(\mathsf{SEP}_U)$, $\mathsf{cov}(\mathsf{SEP}_H)$ を考えると，これらは，「新しい ω 上の組合せ論的概念」と考えることができる．これらについて，面白い結果は見つかるだろうか?

参考文献

[1] T. Bartoszyński and H. Judah. *Set Theory: On the Structure of the Real Line*. A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1995.

[2] A. N. Dranishnikov, J. Keesling, and V. V. Uspenskij. On the Higson corona of uniformly contractible spaces. *Topology*, Vol. 37, pp. 791–803, 1998.

[3] 嘉田 勝, 友安一夫. How many miles to $\beta\omega$? — $\beta\omega$ まで何マイル? 一般及び幾何学的トポロジーと関連する諸問題, 数理解析研究所講究録, No. 1370, pp. 86–101. 京都大学数理解析研究所, 2004.

[4] M. Kada, K. Tomoyasu, and Y. Yoshinobu. How many miles to $\beta\omega$? — Approximating $\beta\omega$ by metric-dependent compactifications. *Topology Appl.*, Vol. 145, pp. 277–292, 2004.

[5] 嘉田 勝, 友安 一夫, 吉信 康夫. How many miles to $\beta\omega$? II. 集合論的及び幾何学的位相空間論とその応用, 数理解析研究所講究録, No. 1419, pp. 105–125. 京都大学数理

解析研究所, 2005.

[6] K. Kawamura and K. Tomoyasu. Approximations of Stone-Čech compactifications by Higson compactifications. *Colloquium Mathematicum*, Vol. 88, pp. 75–92, 2001.

[7] R. G. Woods. The minimum uniform compactification of a metric space. *Fund. Math.*, Vol. 147, pp. 39–59, 1995.

バビロンの流れのほとりに座り
シオンを思って，私たちは泣いた．
竪琴は，ほとりの柳の木々に掛けた．
わたしたちを捕囚にした民が
歌をうたえと言うから
わたしたちを嘲る民が，楽しもうとして
「歌って聞かせよ，シオンの歌を」と言うから．
どうして歌うことができようか
主のための歌を，異教の地で．

(詩篇 137)